現代力学 II 演習１解答例

問１- (a)

水平面に対する人の速さを相対速度と同じ方向に v_1 ととり、板の速さを逆の方向に v_2 ととる。この系には外部から水平方向の外力は働いていないから、人が歩き始める前後で全系の運動量の総和は保存し、

$$0 = 50\, v_1 - 100\, v_2 \qquad (1)$$

が成り立つ。

相対速度が与えられているから、v_1 と v_2 の関係は以下の様に決まる。

$$1 = v_1 + v_2 \qquad (2)$$

(2)より、 $v_1 = 1 - v_2$ (2')

(1) に代入して、 $50\,(1 - v_2) - 100 v_2 = 0$

$\therefore\ v_2 = 1/3$ m/s

(2')に代入して、 $v_1 = 2/3$ m/s

問１- (b)

人と板の２体の全質量は $M = 50 + 100 = 150$ kg

２体の換算質量は $\mu = 50 \text{ x } 100 /(50 + 100) = 100/3$ kg

問１- (c)

２体の重心運動のエネルギーK_G については、水平方向の外力が働いていない事から、歩き出す前後で変化せず、もともと全系は静止していたから、

$K_G = 0$ である。

２体の相対運動のエネルギーK'はμを用いると相対速度で決まり、

$K' = 1/2 \text{ x } 100/3 \text{ x } 12 = 50/3$ (J)

問１-(d)

人の運動エネルギーは $K_1 = 1/2 \text{ x } 50 \text{ x } v_1^2$ であるから、

$K_1 = 50/2 \text{ x } (2/3)^2 = 100/9$ (J)

板の運動エネルギーは $K_2 = 1/2 \text{ x } 100 \text{ x } v_2^2$ であるから、

$K_2 = 100/2 \text{ x } (1/3)^2 = 50/9$ (J)

(c)より $K_G + K' = 50/3$ (J)、また、上記より、$K_1 + K_2 = 100/9 + 50/9 = 50/3$ (J)

となり、 $K_G + K' = K_1 + K_2$ が成り立つ。

問２

$\boldsymbol{A}$ を任意のベクトルとすると、

$$|\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{A}| = A \cdot A \cdot \sin(0) = 0$$

長さが 0 であるベクトルは 0 であるから、$\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{A} = 0$

又は、$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ を任意のベクトルとして、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_y A_z - A_z A_y \\ A_z A_x - A_x A_z \\ A_x A_y - A_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問３

質量中心 z_G と相対座標 z は、

$$z_G = (m_1 z_1 + m_2 z_2)/M, \quad z = z_2 - z_1$$

バネの伸びは $z - l_0$ で m_1 と m_2 の間に働く力 F_{21} は、

$$F_{21} = -k\,(z - l_0)$$

ただし、F_{12} の方向を z 軸の正の方向にとった。外力は重力のみで、その総計は、$-Mg$ ($= (m_1+m_2)g$)であるから、z_G と z に対する運動方程式は、

$$Mz_G = -Mg \qquad (1)$$

$$\mu z = -k\,(z - l_0) \qquad (2)$$

ただしここで、　$\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$

$t = 0$ では、m_1 に働く重力でバネが伸びているから、

$$m_1 g = k\,(-z_1 - l_0) \quad \text{より}$$

$$z_1(0) = -l_0 - m_1 g/k$$

$z_2(0) = 0$ とあわせて、

$$z_G(0) = (1/M)(-m_1 l_0 - m_1{}^2 g/k) = -(m_1/M)(l_0 + m_1 g/k)$$

$$z(0) = 0 - z_1(0) = l_0 + m_1 g/k$$

$t = 0$ では、m_1, m_2 とも静止しているから

$$\dot{z}_G(0) = 0, \qquad \dot{z}(0) = 0$$

これらの初期条件の下で(1)を解くと、

$$z_G = -(1/2)gt^2 - (m_1/M)(l_0 + m_1 g/k) \qquad (3)$$

(2)は変型すると、　$(d^2/dt^2)(z - l_0) = -(k/m)\,(z - l_0)$ 　となるので、

初期条件より、　$(z - l_0) = (m_1 g/k)\cos\omega t$, 　ただし $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$

$$\therefore z = (m_1 g/k)\cos\omega t + l_0 \qquad (4)$$

$z_G = (m_1 z_1 + m_2 z_2)/M$, 　$z = z_2 - z_1$ 　より、

$z_1 = z_G - (m_2/M)\,z$、　$z_2 = z_G + (m_1/M)\,z$ 　であるので、

これに、(3),(4)を代入して、

$$z_1 = -(1/2)gt^2 - l_0 - m_1{}^2 g/Mk - (m_1 m_2 g/Mk)\cos\omega t$$

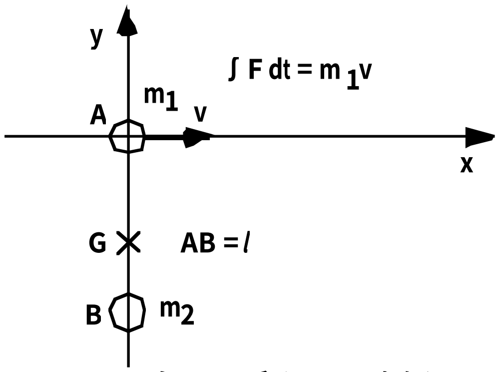
$$z_2 = -(1/2)gt^2 - m_1{}^2 g/Mk + (m_1{}^2 g/Mk)\cos\omega t$$

問４

２質点間の相対的な方向を決めているのは２質点を結ぶ直線だけである。この方向から傾くと対称性を崩してしまうため、質点に内部構造がない限りにおいては、２質点に働く力の向きはこの直線に平行でなければならない。

この力が保存力であると仮定出来、空間対称性からポテンシャルが２質点間の距離のみの関数で表せるとすると、ポテンシャルの微分の方向は２質点を結ぶ直線の方向になる事を示す事もできる。

問５



A 点を原点にとり、B(0 , $-l$)とする。重心の y 座標は、

$$y_G = (0 - m_2 l) / (m_1 + m_2) = - m_2 l / (m_1 + m_2)$$

$$\therefore GA = -y_G = m_2 l / (m_1 + m_2)$$

撃力を与えた後は外力が働かないから、全運動量は保存し、撃力により与えられた運動量は $m_1 v \boldsymbol{e}_x$ であるから、

$$\boldsymbol{P} = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{v}_G = m_1 v\, \boldsymbol{e}_x$$

$$\therefore \boldsymbol{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \boldsymbol{e}_x$$

したがって、重心は x 軸の正の方向に一定の速さ $m_1 v / (m_1+m_2)$で等速直線運動する。

外力が働かないから、角運動量も保存する。ここでは、相対運動の角運動量 L'の保存則を用いる。換算質量$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$を用いると、$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{r} \times \mu \boldsymbol{v}$ 。

撃力を与えられた直後の角運動量は、$\boldsymbol{L}' = l\, \boldsymbol{e}_y \times \mu\, v\, \boldsymbol{e}_x = - \mu\, l\, v\, \boldsymbol{e}_z$であるから、

回転運動は常に $x\,y$平面内にあり、

$$L'_z = - \mu\, l\, v$$

棒の回転角速度を$-\omega\, \boldsymbol{e}_z$ とすると、

$$L'_z = \mu\, l^2 \omega, \qquad \omega = v / l$$

よって、棒は重心のまわりに一定角速度$\omega = v / l$ で回転する。

この時、重心のまわりの運動エネルギーK'は、

$$K' = (1/2)\, \mu\, v^2 = (1/2)\, \mu\, (l\, \omega)^2$$

重心運動のエネルギーとの和を考えると、

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2 + m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

となり、初めに m_1 に与えられたエネルギーに等しい事が分る。

次に、x 軸に対して、θ の角度で撃力を加えた場合を考える。同様の議論から、

$$\boldsymbol{P} = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{v}_G = m_1 v\, (\cos\theta\, \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y)$$

$$\therefore \boldsymbol{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v\left(\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y\right)$$

となり、重心は一定の速さ $m_1 v / (m_1+m_2)$で、撃力の方向に運動する。

一方、重心のまわりの角運動量は、

$$\boldsymbol{L}' = -BA\, \boldsymbol{e}_y \times \mu\, v\, (\cos\theta\, \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y)$$

$$= - \mu\, l\, v \cos\theta\, \boldsymbol{e}_z$$

したがって、回転運動はやはり xy 平面内に限られる。角速度をωとすると、

$L'_z = -\mu l^2 \omega = -\mu l v \cos\theta$　より、

$\omega = (v / l)\cos\theta$

重心のまわりの運動エネルギーは、

$K' = (1/2)\,\mu\,(l\,\omega)^2 = (1/2)\,\mu\,v^2\cos^2\theta$

となり、初めに与えられたエネルギーは $(1/2)\,\mu\,v^2\sin^2\theta$ だけ、失われている事が分る。

問６

F は中心力なので、

$$\boldsymbol{F} = F\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$ と書けて、

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\times F\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = 0$$ から、

$\boldsymbol{L} = \text{constant}$

$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{r}\ \mathrm{x}\ \boldsymbol{v}$ より、$\boldsymbol{L}$ は $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{v}$ に垂直。したがって、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は共に常に $\boldsymbol{L}$ に垂直な平面内に有り、運動はこの平面内に限られる。この面内の運動を力の中心を原点とする円筒座標で表わすと、

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\therefore \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = mr\boldsymbol{e}_r\times\left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right) = mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

したがって、$r^2\dot{\varphi} = \text{constant}$ となる。

この時、面積速度は、右図より、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r\cdot r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$ であるから、

$r^2\dot{\varphi} = \text{constant}$ より、

$$\frac{dS}{dt} = \text{constant}$$ となる。